« **Supraconductivité** » - Janvier 2012, Tous documents autorisés, durée 2 heures

Structure des vortex dans un objet mésoscopique

On s'intéresse à la distribution du paramètre d'ordre Ψ dans une sphère (ou un disque) mésoscopique[1] de rayon $R \sim \xi \sim \lambda$ où ξ est la longueur de cohérence du matériau (on note ξ_0 sa valeur à T=0) et λ la longueur de pénétration. La variation spatiale de Ψ est alors grandement déterminée par les effets de bords (conditions aux limites) mais les équations de Ginzburg-Landau restent valides. On se place en coordonnée cylindrique et le champ extérieur H est aligné selon z. On note n_s la densité superfluide du composé macroscopique.

1) Montrez que le potentiel vecteur $\vec{A}$ vérifie l'équation : $\kappa^2 \Delta \vec{A} = \dfrac{B_{c2}}{2i}(\psi \vec{\nabla}\psi^* - \psi^* \vec{\nabla}\psi) + |\psi|^2 \vec{A}$

où les longueurs sont exprimés en unité de ξ_0 et $|\psi|^2$ en unité de n_s.

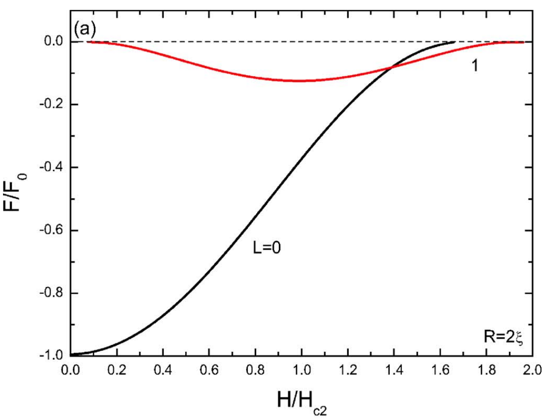
2) On suppose que $\vec{A}$ est égal à sa valeur dans le vide : $\vec{A} = \dfrac{\mu_0 H \xi_0 \rho}{2}\vec{u_\theta}$ (avec $\rho = r/\xi_0$ dans les unités définies en Q1). Montrez que pour $|\psi|^2 << 1$, l'équation différentielle satisfaite par ψ est alors : $\Delta\psi - ih\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} + [1 - \dfrac{h^2}{4}\rho^2 - \dfrac{T}{T_c}]\psi = 0$ où h est un paramètre que l'on exprimera en fonction de H et $H_{c2}(0)$.

On peut montrer que les solutions de cette équation sont de la forme $\Psi(\rho,\theta) = \varphi(\rho)e^{iL\theta}$ (dans le plan z=0) avec : $\varphi(\rho) = \rho^L \exp(-h\rho^2/4)M_L(h\rho^2/2)$ où $M_L(x)$ est une fonction de Kummer que l'on supposera ici constante (c'est le cas pour h suffisamment grand).

3) L est appelée *vorticité* : justifiez ce terme et expliquez pourquoi L doit être un entier.

4) Tracez $\varphi(\rho)$ pour L = 0, 1 et 2 (pour une valeur arbitraire de h non nulle) et interprétez l'allure en terme de « vortex », on précisera notamment comment ces « vortex » se distribuent dans ces objets mésoscopiques. A titre de comparaison, reportez également de façon <u>schématique</u> sur le graphe précédent, $|\psi|$ en fonction de ρ pour L =2 pour un objet macroscopique ($R>>\xi$).

5) La figure ci-contre montre l'évolution de l'énergie libre en fonction de H/H_{c2} pour différentes valeurs de L. Tracez l'évolution de L et de la valeur de ρ (notée ρ_{max}) correspondant au maximum de φ en fonction de H (on peut noter que H peut être ici supérieur à H_{c2} du fait des effets de bord)



[1] Cet exercice est inspiré par les travaux publiés en

Sphère de London

On considère ici une sphère supraconductrice (de centre O et de rayon R) en rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire Ω constante (le long de Oz). On rappelle que l'équation [A] : $-q\vec{B}/m+\overrightarrow{rot}\vec{v}_s=\vec{0}$ doit être vérifiée en tout point de la sphère ($\vec{v}_s$ étant la <u>vitesse de rotation des électrons superfluides</u>). On note $\vec{v}_i$ la <u>vitesse de rotation des charges non condensée</u> dans l'état supraconducteur (principalement les ions du réseau mais également les électrons non condensées).

1) Rappelez brièvement l'origine de l'équation [A].

Initialement $\Omega=0$, $B=0$ et la sphère est mise en rotation (en l'absence de tout champ extérieur). Les charges non condensées, rigidement attachés à la sphère, se mettront à tourner ($\vec{v}_i=\vec{\Omega}\wedge\vec{r}$), le but de cet exercice est de déterminer $\vec{v}_s$.

2) On peut tout d'abord supposer soit (1) que les électrons du condensat restent immobiles *en tous points de la sphère* ($\vec{v}_s=\vec{0}$), ou au contraire (2) qu'ils se déplacent eux aussi à la vitesse $\vec{v}_s=\vec{v}_i$. Montrez[2] qu'aucune de ces deux hypothèses n'est compatible avec [A].

3) Montrez que $\overrightarrow{rot}\vec{B}=-\mu_0 n_s q(\vec{v}_s-\vec{v}_i)$

4) En déduire que $\Delta(\vec{v}_s-\vec{v}_i)-(\vec{v}_s-\vec{v}_i)/\lambda^2=\vec{0}$. Tracez (schématiquement) $\|\vec{v}_s\|$ et $\|\vec{v}_i\|$ en fonction de r (dans le plan Oxy, on notera v_{s0} la valeur de v_s en r=R mais on ne cherchera pas à déterminer ici cette valeur)

5) Montrez que l'on a également $\Delta(\vec{B}-2m\vec{\Omega}/q)-(\vec{B}-2m\vec{\Omega}/q)/\lambda^2=\vec{0}$, et tracez l'allure de $B_z(r)$ (dans le plan 0xy). Tracez les lignes de champ dans un plan Oxz (aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la sphère, on suppose que R>>λ).

6) <u>De façon indépendante</u>, utilisez la seconde équation de Ginzbug-Landau pour déterminer le flux de B ($\Phi(r)$) dans un cercle de rayon r (dans la zone ou $v_s=v_i$). Déterminez la valeur du « saut de phase » en faisant tendre r vers zéro. Exprimez $\Phi(r+dr)$ en fonction de $\Phi(r)$ et $B(r)$ et montrez que l'on retrouve ainsi l'expression de B déterminée en Q5.

7) Qu'obtiendrait-on si la sphère n'était pas mise en rotation mais translatée uniformément ?

Des sphère supraconductrices en rotation sont notamment utilisés dans le projet « gravity probe B » (http://www-cosmosaf.iap.fr/Gravity-probe-B.htm) afin de vérifier certaines prédictions de la relativité générale d'Einstein.

---

[2] Rappel : $\overrightarrow{rot}(\vec{A})=(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z})\vec{u}_r+(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r})\vec{u}_\theta+\frac{1}{r}(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta})\vec{u}_z$