

A. Etat intermédiaire dans les supraconducteurs de type I

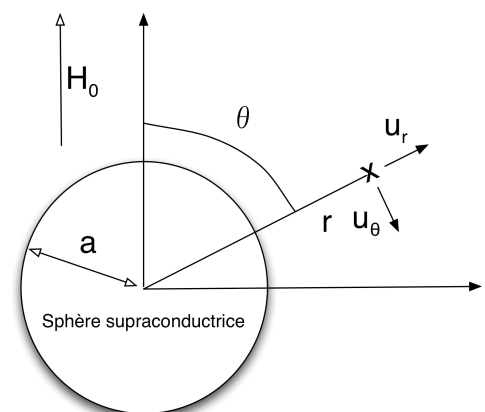
1. Les supraconducteurs de type II sont caractérisés par l'existence d'un état mixte. Rappelez brièvement quelle est l'origine de cet état mixte et ces principales caractéristiques.

2. Un supraconducteur de type I est quant à lui caractérisé par une transition directe entre l'état supraconducteur et l'état normal lorsque le champ H devient supérieur (ou égal) au champ critique H_c . Néanmoins cette condition (locale) n'est pas forcément remplie simultanément en tout point de l'échantillon (supposé ici cristallographiquement et chimiquement parfait, et sans aimantation dans l'état normal). Précisez l'origine de cette « inhomogénéité ». On note alors $[1-\rho]$ la fraction d'échantillon qui transite vers l'état normale et H_N le champ magnétique en ces points. Quelle est la *moyenne* de l'induction B dans l'échantillon ?

3. La densité d'énergie libre de l'échantillon s'écrit alors¹ : $F(B, \rho) = F_N - \frac{\mu_0 \rho H_c^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0(1-\rho)}$
Justifiez chacun des trois termes. En déduire que $H_N = H_c$

4. On s'intéresse tout d'abord à un échantillon de forme sphérique (son coefficient de « désaimantation » vaut donc $1/3$). Le champ extérieur H_0 est appliqué selon Oz et son amplitude est tout d'abord comprise entre $2H_c/3$ et H_c . L'amplitude du champ H à l'intérieur de l'échantillon est alors égale à H_c (justifiez cette valeur) et on note B_1 l'amplitude de B . On peut montrer que le champ magnétique de l'échantillon à l'extérieur de la sphère est lui égal à :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{a^3 H_1}{2r^3} [2\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta]$$



¹ On néglige ici l'énergie d'interface

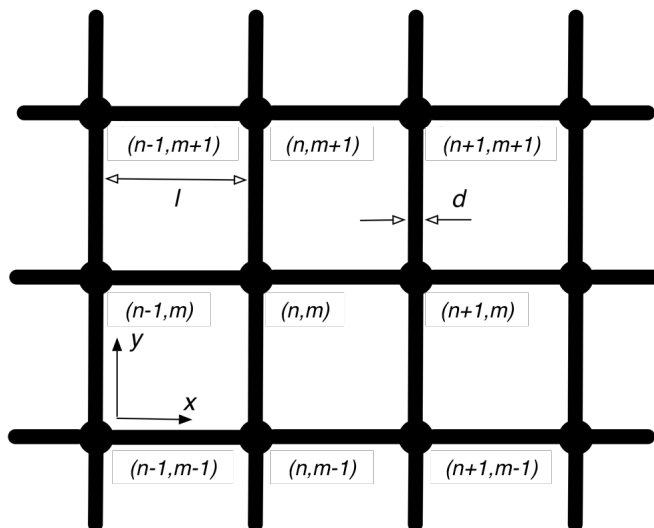
Déterminer les valeurs de B_1 et H_1 à partir des équations de continuité de la composante tangentielle de H et de la composante radiale de B .

5. Représentez l'évolution de B (en norme) à la surface de l'échantillon pour $\theta=0$ (pôle) et $\theta=\pi/2$ (équateur) en fonction de H_0 entre $2H_c/3$ et H_c . Etendre ces courbes entre 0 et $2H_c/3$ et au delà de H_c .

6. Tracez l'évolution de la fraction ρ avec H_0 . Représentez schématiquement la répartition des zones supraconductrices et normales dans la sphère pour $H_0=0, 0.7H_c, 0.9H_c, 2H_c$.

7. Rappelez l'origine de l'énergie d'interface négligée en Q.3. Comment la répartition tracée en Q.6 pourrait-elle être modifiée par cette énergie d'interface ? Comment la fraction ρ évolue-t-elle avec H_0 dans le cas d'un supraconducteur de type II, en quoi la situation est-elle différente et/ou équivalente.

B. Réseau carré de brins supraconducteurs



On considère un ensemble de fils supraconducteurs de diamètre d (très inférieur à la longueur de cohérence ξ) formant un réseau carré de période l . Le champ magnétique est appliqué le long de z et on prendra donc:

$$\vec{A} = Bx\vec{u}_y$$

Le paramètre d'ordre Ψ ne dépend donc que de la coordonnée le long du brin et le problème se ramène alors à un

problème 1D (x pour les brins « horizontaux » et y pour les brins « verticaux »).

1. On se place près de la température critique, quelle approximation peut-on alors faire ? Montrez que le long des brins horizontaux:

$$\Psi(x) = ae^{ix/\xi} + be^{-ix/\xi}$$

2. Montrez que le long des brins verticaux :

$$\Psi(y) = e^{iky} [ce^{iy/\xi} + de^{-iy/\xi}] \quad \text{où } k \text{ est une fonction de } x \text{ dont on précisera la nature.}$$

3. On note $\Psi(n,m)$ l'amplitude du paramètre d'ordre au nœud (n,m) du réseau. Exprimez a en fonction de $\Psi(n,m)$ et $\Psi(n+1,m)$ puis en fonction de $\Psi(n,m)$ et $\Psi(n-1,m)$ en déduire que :

$$2\Psi(n,m)\cos(\alpha) = \Psi(n+1,m) + \Psi(n-1,m)$$

De même montrez que :

$$2\Psi(n,m)\cos(\alpha) = \Psi(n,m+1)e^{-i\gamma n} + \Psi(n,m-1)e^{i\gamma n}$$

(on précisera les valeurs de γ et α)

4. On suppose² que $\Psi(n,m) = f_q(n)e^{iqm}$. En déduire que $f_q(n)$ est solution de:

$$[2\cos(q - \gamma n) - 4\cos(\alpha)]f_q(n) + f_q(n+1) + f_q(n-1) = 0$$

5. L'équation ci-dessus est une équation commune à de nombreux phénomènes physiques (électrons liés en présence d'un champ magnétique, électrons dans des structures modulées, phonons, propriétés des structures incommensurables, ...). Il s'agit d'un cas particulier des équations dites « almost-Mathieu » pour lequel Hofstadter montra que le spectre des solutions présente une structure fractale (« Holstadler Butterfly »). On se limitera ici à l'étude du comportement des solutions uniformes ($q = 0$) pour les petites valeurs de γ . Montrer qu'à la limite continue (en posant $X=nl$), l'équation ci dessus est équivalente à celle de l'oscillateur harmonique. Quelle est la « pulsation » de cet oscillateur.

6. Comparez cette équation à celle obtenue au voisinage de H_{c2} pour un échantillon « plein ». En déduire la valeur de H_{c2} pour le réseau carré étudié ici.

7. Exprimez le courant circulant dans les brins horizontaux en fonction de $\Psi(n,m)$ et $\Psi(n+1,m)$. Que deviendrait ce courant si on avait fait le choix d'écrire $A = -Byu_x$? En déduire que la valeur du courant dans les brins verticaux peut être obtenue à partir du calcul précédent en remplaçant $\Psi(n+1,m)$ par $\Psi(n,m+1)e^{-in\gamma}$. Que deviennent ces valeurs de J_x et J_y lorsque l'on prend pour Ψ la forme donnée en Q.4.

² L'argument est le même que celui utilisé par Bloch pour les électrons dans les potentiels périodiques