

« Supraconductivité » - Janvier 2006, Tous documents autorisés, durée 3 heures

Courant « critique »

La transition entre l'état normal (N) et l'état supraconducteur (S) peut se décrire à partir du formalisme de Ginzburg – Landau. La différence de densité d'énergie libre entre ces deux états s'écrit alors (pour le système « supraconducteur + bobine »):

$$F_s - F_N = \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m}\left|\frac{\hbar}{i}\nabla\psi - qA\psi\right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

1) Quelle est l'origine physique des différents termes de cette expression.

La minimisation de l'énergie libre totale conduit alors aux équations :

$$(GL1) : \alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 + \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - qA\right]^2\psi = 0 \text{ où } A \text{ est le potentiel vecteur et}$$

$$(GL2) : J = \frac{i\hbar q}{2m}[\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi] - \frac{q^2 A}{m}|\psi|^2 \text{ où } J \text{ est le courant circulant dans le matériau}$$

2) Commentez la différence entre l'équation (GL2) et celle obtenue à partir du modèle de London.

3) On suppose que la densité de paires est uniforme et on note $\Psi = |\Psi|e^{i\theta(r)}$. Que deviennent les équations (GL1) et (GL2) dans ce cas. On rappelle que dans la jauge de London : $\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - qA\right]^2\psi \rightarrow (\hbar\nabla\theta - qA)^2\psi$

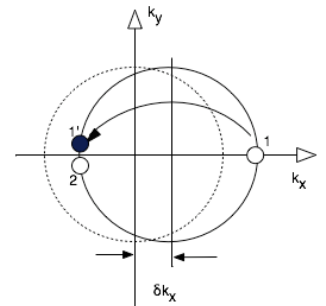
4) On suppose que le supraconducteur est parcouru par un courant J, soit v_s la vitesse correspondante des paires supraconductrices. Montrer que : $\alpha + \beta|\psi|^2 + \frac{1}{2}mv_s^2 = 0$

5) On note $|\Psi_\infty| = -\alpha/\beta$ et $y = |\Psi|/|\Psi_\infty|$, montrer que : $J = \frac{\hbar}{\mu_0 q \lambda^2 \xi} y^2 \sqrt{1 - y^2}$

6) Quelle est la signification physique de λ (profondeur de pénétration) et ξ (longueur de cohérence).

7) Tracer $J(y)$ et en déduire la valeur J_c maximale pouvant circuler dans le matériau.

On souhaite désormais comparer cette valeur à celle obtenue à partir de la théorie BCS. On note Δ le gap supraconducteur relié à la longueur de cohérence par $\Delta = \hbar v_F / \pi \xi$. Une paire de Cooper est représentée par les cercles blancs sur la figure ci-contre. En présence d'un courant J (selon Ox) la sphère de Fermi est « décalée » de $\delta k_x \ll k_F$. On s'intéresse à la diffusion vers « l'arrière » de l'électron « avant » de la paire (diffusion de 1 en 1').



8) On note k_1 et k_2 les valeurs de k des deux électrons de la paire. Donner k_1 et k_2 (avant la diffusion) en fonction de k_F et δk_x . Montrer que l'énergie d'une paire de Cooper est de l'ordre de $\hbar^2 k_F^2 / m - 2\Delta$ (au premier ordre en $\delta k_x / k_F$). que se passe-t-il pour l'électron 2 lorsque 1 est diffusé en 1', en déduire que l'énergie de la paire n'est pas affectée par la diffusion.

9) On suppose maintenant que la paire est brisée par la diffusion $1 \rightarrow 1'$. Quelles sont les nouvelles valeurs de k_1 et k_2 . Quelle est alors la valeur de l'énergie de la paire (on se limitera à un développement limité au premier ordre en $\delta k_x / k_F$). En déduire la valeur maximale (J_c) du courant pouvant circuler dans le matériau. Conclusion.

10) Donner l'ordre de grandeur de J_c (pour $T \sim 0$) pour un supraconducteur de $\xi \sim 100 \text{ \AA}$ et $\lambda \sim 1000 \text{ \AA}$. Une mesure effectuée sous champ ($H > H_{c1}$) montre que le matériau présente de la dissipation (i.e. une résistance non nulle) pour $J > 10^5 \text{ A/cm}^2$. Pourquoi.

Champ critique d'une plaque mince

On s'intéresse au champ critique du plaque mince d'épaisseur $d \ll \xi, \lambda$. On applique à l'aide d'une bobine un champ magnétique H_a ($// O_x$) parallèlement à la surface de la plaque.

1) Justifier que la densité d'enthalpie libre du système « supraconducteur + bobine » s'écrit :

$$g_s = g_N + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m}|qA\psi|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} - H.B$$

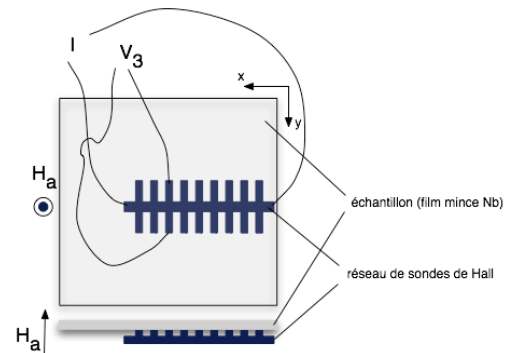
2) Que peut-on dire de la variation spatiale de B à l'intérieur de la plaque. En déduire une forme approchée de B et l'expression correspondante du potentiel vecteur A.

3) En déduire une expression de l'enthalpie libre par unité de surface du système : $G_s = \int_{-d/2}^{d/2} g_s(z) dz$
donner la valeur de $|\psi|^2$ permettant de minimiser G_s (on note $|\Psi_\infty| = -\alpha/\beta$).

4) En déduire l'existence d'un champ critique H_c^* , comparer cette valeur au champ critique (H_c) d'une plaque épaisse.

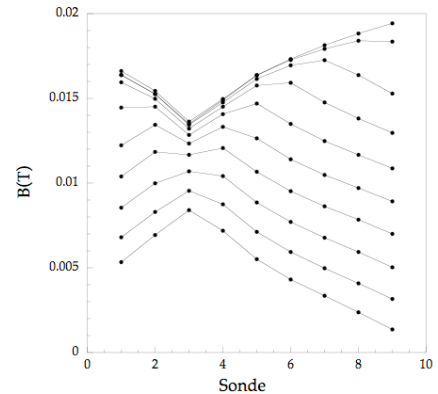
Distribution des vortex dans un film mince de Nobium

On mesure l'induction B à la surface d'un film mince de Nobium (carré gris, figure ci-contre) à l'aide d'un réseau constitué de 9 croix de Hall. Le réseau est plaqué sur l'échantillon et est parcouru par un courant I. La tension V_i mesurée sur la $i^{\text{ème}}$ sonde est alors proportionnelle à la composante (B_z) de B perpendiculaire à la sonde en ce point ($1 < i < 9$, par souci de clarté seule V_3 a été représentée sur le schéma).



1) Expliquer très brièvement le fonctionnement d'une croix de Hall.

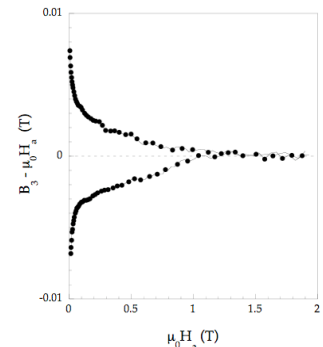
2) On fait varier progressivement le champ magnétique extérieur $\mu_0 H_a$ de 0 à $\sim 0.02T$ puis de $\sim 0.02T$ à 0. On mesure la distribution de B_z présentée sur la figure ci-contre (en fonction du numéro de la sonde) pour différentes valeurs de H_a (appliqué perpendiculairement au film). Discuter la forme des profils obtenus. Lors de quelle séquence de champs (i.e. champ croissant ou décroissant) ces profils ont-ils été réalisés ? Le Nobium est-il un supraconducteur de type I ou de type II (justifier votre réponse) ?



3) Dessiner schématiquement les profils que l'on aurait obtenu lors de l'autre séquence (pour quelques valeurs de H_a).

4) Dessiner schématiquement quelques lignes de flux dans le film (en vue de profil) pour $\mu_0 H_a \sim 0.02T$. Ce profil de champ est associé à un courant critique J_y supposé indépendant de B. Quelle relation lie J et B, en déduire pourquoi le profil n'est pas parfaitement linéaire pour $\mu_0 H_a \sim 0.02T$?

5) Même si le profil n'est pas parfaitement linéaire, on peut définir une pente « moyenne » $(dB_z/dx)_{\text{moy}}$ reliée à J_y par $(dB_z/dx)_{\text{moy}} \sim \mu_0 [4J_y b/a]$ où b/a est le rapport épaisseur/largeur $\sim 10^{-3}$. Sachant que les sondes sont espacées de $20\mu m$, donner un ordre de grandeur de J_y (et son incertitude).



6) On mesure désormais le champ au niveau de la troisième sonde (B_3) en fonction de $\mu_0 H_a$. La courbe obtenue est présentée ci-contre. Expliquer pourquoi on obtient deux branches ($B_3 - \mu_0 H_a > 0$ et $B_3 - \mu_0 H_a < 0$).

7) Quelle est la valeur du champ critique supérieur H_{c2} . Quelle autre méthode permettrait d'obtenir ce champ. Expliquer pourquoi on ne peut pas déterminer H_{c1} à partir de ces mesures ? Quelle géométrie d'échantillon faudrait-il utiliser pour avoir cette valeur.