Mécanique Quantique L3-PHYSIQUE

EXAMEN DE PREMIERE SESSION - MAI 2013

3 heures, documents manuscrits autorisés

A. On considère un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de pulsation ω se déplaçant le long de l'axe Ox. On désigne les énergies et kets propres de cet oscillateur par E_n et $|\Phi_n>$ (où n est un entier ≥ 0). On suppose qu'à l'instant $t = 0$, l'oscillateur se trouve dans l'état : $|\Psi(0)>= 1/\sqrt{2}(|\Phi_1> + |\Phi_2>)$. On rappelle que $< x|\Phi_0 >= Aexp(-\lambda x^2/2)$ avec $\lambda = m\omega/\hbar$, $A = (\lambda/\pi)^{1/4}$ et que $a^+|\Phi_n >= \sqrt{n+1}|\Phi_{n+1}>$ où l'opérateur (création) $a^+ = [\sqrt{\lambda}x - 1/\sqrt{\lambda}.\partial/\partial x]/\sqrt{2}$.

1. Rappelez (sans démonstration) quel est le spectre des énergies.
2. Montrez que $< x|\Phi_1 >= (\sqrt{2}A)(\sqrt{\lambda}x)exp(-\lambda x^2/2)$ et $< x|\Phi_2 >= (A/\sqrt{2})(2\lambda x^2 - 1)exp(-\lambda x^2/2)$. Tracez $| < x|\Phi_n > |^2$ en fonction de x pour $n = 0, 1$ et 2.
3. Exprimez l'état $|\Psi(t)>$ de l'oscillateur à $t > 0$ en fonction de $|\Phi_1>$, $|\Phi_2>$, E_1 et E_2.
4. Quelle est la moyenne de l'opérateur position à l'instant t ?
5. Montrer que $< x > (t)$ est bien solution de l'équation du mouvement classique.

Rappel : $\int_0^\infty exp(-\alpha.x^2)dx = \sqrt{\pi/\alpha}$

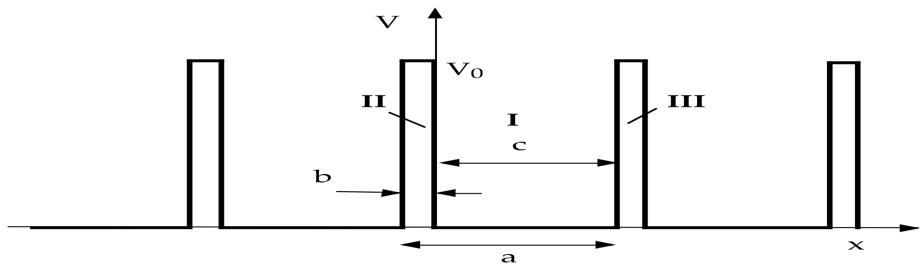
B. On considère l'électron d'un atome d'hydrogène dans l'état :
$|\Psi(0)>= A(2|1,0,0> - |2,0,0> - 3|2,1,-1> + |2,1,1>)$ où les états $|n,l,m>$ sont les états propres de l'atome d'hydrogène et A une constante. On rappelle que les états propres de l'atome d'hydrogène sont de la forme $\Phi(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r).Y_{l,m}(\theta,\phi)$ où les $Y_{l,m}$ sont les harmoniques sphériques et $R_{n,l} = v_{n,l}(r)(r/a_0)^l exp(-r/na_0)$ avec $v_{1,0}(r) = 2/a_0^{3/2}$, $v_{2,0}(r) = 2/(2a_0)^{3/2}(1 - r/2a_0)$, $v_{2,1}(r) = 3/(6a_0)^{3/2}$ (a_0 étant le rayon de Bohr).

1. Calculer la constante A de façon à normaliser $|\psi(0)>$
2. Rappeler (sans démonstration) quel est le spectre des énergies de l'atome d'hydrgène. Si on effectue une mesure de l'énergie pour l'état $|\Psi(0)>$, quels seraient les résultats possibles de cette mesure, avec quelles probabilités ? Donnez l'énergie moyenne de l'électron et son écart-type en fonction de E_1.
3. De même, quels seraient les résultats possibles de la mesure de l'opérateur L_z, avec quelles probabilités ?
4. On effectue une mesure de l'opérateur L^2 et on obtient $2\hbar^2$. Quelle est la probabilité d'obtenir ce résultat ? Quel est l'état de l'électron juste apès cette mesure ? Quelle est alors la probabilité de trouver l'électron entre les sphères de rayons r et r + dr juste après cette mesure.

C. On considère un système décrit par l'Hamiltonien $H = aL_z + b/\hbar L_z^2$

1. Justifiez que les harmoniques sphériques sont des états propres de H. On considère le cas $l = 1$, quelle est alors la dimension de l'espace vectoriel à considérer.
2. Déterminer le spectre en énergie et discuter son éventuelle dégénérescence en fonction du rapport b/a.
3. A quel type d'interaction correspond le premier terme si $a = \alpha B_z$ (où B_z est un champ magnétique aligné selon Oz), exprimez dans ce cas α en fonction de la charge q (< 0), la masse m et $\hbar$. quelle orientation du moment magnétique ce terme privilégie-t-il ? De même quelle sera l'orientation privilégiée par le second terme (dit d'anisotropie). Discuter l'orientation du moment magnétique dans l'état fondamental en fonction de b/a.

D. 0n considère le potentiel périodique (de période a) défini par la figure ci-dessous (modèle de Kronig-Penney) :



On note respectivement $\Phi_I(x)$, $\Phi_{II}(x)$ et $\Phi_{III}(x)$ les expressions de létat stationnaire d'énergie E dans les régions notées I, II et III de la figure. On suppose que : $0 < E < V_0$ et on note $K = \sqrt{2mE/\hbar}$, $Q = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar}$ et $P = Q^2ab/2$.

1. Montrer que Φ_I et Φ_{II} peuvent s'écrire sous la forme : $\Phi_I(x) = Acos(Kx) + Bsin(Kx)$ et $\Phi_{II}(x) = Acosh(Qx) + B(K/Q)sinh(Qx)$, où A et B sont deux constantes.
2. On peut montrer que, pour $-b < x < 0$, $\Phi_{III}(x + a) = \Phi_{II}(x)e^{ika}$ où k est un réel (théorème de Bloch). Comment peut-on justifier cette relation ?
3. Utilisez les équations de continuité en $x = c$ pour montrer que A et B sont non nulles si et seulement si : $cos(ka) = cos(Kc)cosh(Qb) + sin(Kc)sinh(Qb)(Q^2 - K^2)/2KQ$.
4. Montrer que pour des barrières très hautes ($V_0 >> E$) et fines (avec $Qb \to 0$), la condition obtenue en Q.3 devient : $P.sinc(Ka) + cos(Ka) = cos(ka)$. Tracez les deux termes de cette équation en fonction de Ka. En déduire que, si $P \neq 0$, il existe certaines gammes de Ka (donc de E) pour lesquelles le système n'a pas de solution (ces gammes sont appelées "gaps").
5. Quelles sont les seules valeurs de l'énergie permises si $P \to \infty$. A quoi correspondent alors ces énergies ?
6. Exprimez E en fonction de k lorsque $P = 0$, justifiez le résultat obtenu.
